集合と論理

4　命題の真偽，背理法

4　演習題

（イ）

(1)

m が自然数のとき，$\sqrt{m}$ が整数でなければ，$\sqrt{m}$ は無理数か既約分数として表せる。

そこで $\sqrt{m}$ を既約分数とし，$\sqrt{m}=\dfrac{q}{p}$（p は 1 でない整数で p と q は互いに素）とすると，

$m=\dfrac{q^2}{p^2}$ となり，m は自然数ではない。

これは m を自然数であるとする条件に反する。

5　命題と必要条件・十分条件

(3)

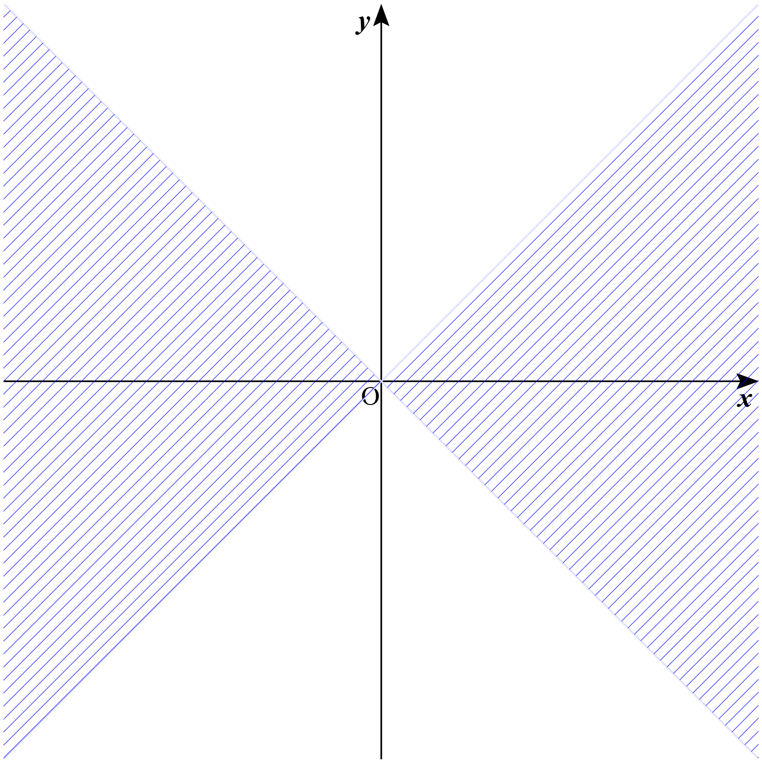
領域問題として捉えると，

$x^2>y^2$ より，$x^2-y^2=(x+y)(x-y)>0$

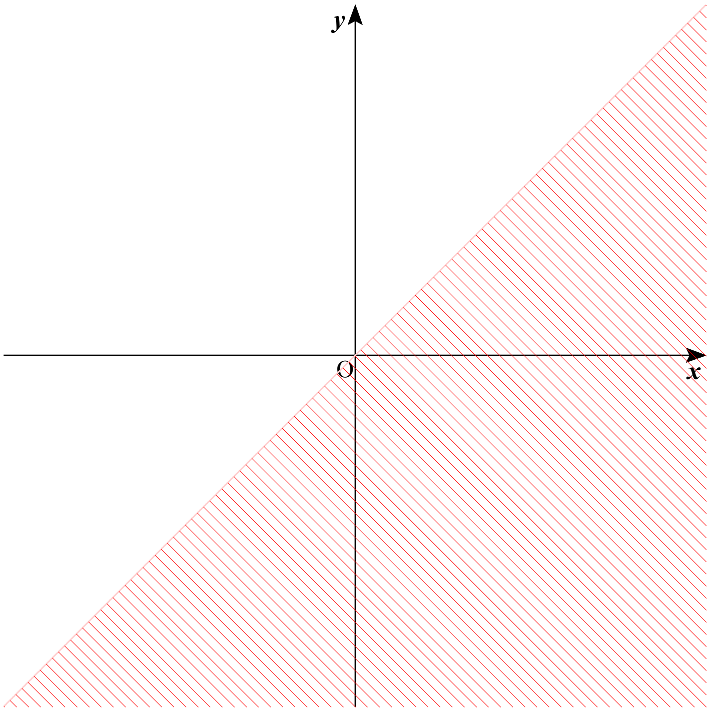
よって，

$x+y>0, x-y<0$ または $x+y<0, x-y>0$

これを xy 座標平面上に図示すると下図のようになる。



一方，$x > y$ を図示すると，



これより，

$x^2 > y^2$ と $x > y$ の間に包含関係が成立しない。

よって，必要条件でも十分条件でもない。

(4)

$ab = 0 \Leftrightarrow a = 0$ または $b = 0$

$|a - b| = |a + b| \Leftrightarrow a - b = \pm(a + b) \Leftrightarrow a = 0$ または $b = 0$

よって，$ab = 0 \Leftrightarrow |a - b| = |a + b|$

5　演習題

(1)

「n が 3 の倍数であり 4 の倍数でないならば n が 12 の倍数でない」ことの真偽

判定その 1

$n = 3k$ かつ $n = 4l \pm 1$ のとき

$n = 4l \pm 1$ より n は奇数となるので，n は 12 の倍数でない。

$n = 3k$ かつ $n = 4l + 2$ のとき

$3k = 4l + 2$ より，$k = l + \dfrac{l+2}{3}$

k は整数だから，$l + 2$ は 3 の倍数である。

よって，$l + 2 = 3m$ とおくと，

$$\begin{aligned} n &= 4l + 2 \\ &= 4(3m - 2) + 2 \\ &= 6(2m - 1) \end{aligned}$$

$2m - 1$ は奇数だから，n は 12 の倍数でない。

よって，

「n が 3 の倍数であり 4 の倍数でないならば n が 12 の倍数でない」は真である。

判定その 2

「n が 12 の倍数ならば n が 3 の倍数かつ 4 の倍数」は真であり，

この対偶は，

「n が 3 の倍数でないまたは 4 の倍数でないならば n が 12 の倍数でない」である。

「n が 3 の倍数であり 4 の倍数でない」は「n が 3 の倍数でないまたは 4 の倍数でない」に含まれるから，,

「n が 3 の倍数であり 4 の倍数でないならば n が 12 の倍数でない」も真である。

「n が 12 の倍数でないならば n が 3 の倍数であり 4 の倍数でない」ことの真偽

反例 $n = 5$ より偽

よって，

「n が 3 の倍数であり 4 の倍数でない」ために「n が 12 の倍数でない」ことは，

必要条件であるが十分条件でない。